Primjer 1

Paket se prenosi po linku. Vjerovatnoća neuspješnog prenosa je q. Vjerovatnoća uspješnog prenosa je 1-q. Odrediti srednji broj pokušaja do uspješnog prenosa.

Kako glasi funkcija generisanja vjerovatnoća za odgovarajuću slučajnu promjenljivu.

a) q=0.2 b)q=0.9

Primjer 1 - Rešenje

Geometrijska raspodjela:

$$P(X=k)=(1-q)q^k \quad k=0,1,2\dots$$

$$E[X]=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty} k(1-q)q^k = (1-q)q\sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1}=(1-q)q\cdot\frac{d}{dq}\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$
$$=(1-q)q\cdot\frac{d}{dq}\frac{1}{1-q}=\frac{(1-q)q}{(1-q)^2}=\frac{q}{1-q}$$

Funkcija generisanja vjerovatnoće: $X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-q\right)(zq)^k=\frac{1-q}{1-zq}$

a) E[X]=0.25 , b) E[X]=9

Primjer 2

U pošti postoje dva telefona. Kada osoba A odluči da koristi telefon i dođe u poštu utvrdi da jedan od njih već koristi osoba B. Pretpostavimo da vrijeme korišćenja telefona ima eksponencijalnu raspodjelu parametra μ. Koliko iznosi vjerovatnoća da osoba A završi korišćenje telefona prije osobe B?

Primjer 2 - Rešenje

- X – vrijeme trajanja korišćenja telefona od strane osobe A
- Y – vrijeme trajanja korišćenja telefona od strane osobe B

$$P(X<Y)=\int_0^\infty P(X<y|Y=y)f_Y(y)dy=\int_0^\infty F_X(y)f_Y(y)dy=$$

$$=\int_0^\infty\left(1-e^{-\mu y}\right)\mu e^{-\mu y}dy=1-\mu\int_0^\infty e^{-2\mu y}dy=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Za slučaj determinističke raspodjele:

$$P(X<Y)=0$$

Primjer 3

Pretpostavimo da se dva servera A i B koriste za pružanje Web servisa. Brzina pružanja servisa zavisi od opterećenosti mreže i može se modelovati eksponencijalnom raspodjelom parametara λ_A , u slučaju servera A, odnosno λ_B u slučaju servera B. Pretpostaviti da se performanse servera procjenjuju tako što im se šalju identični zahtjevi i mjeri se vrijeme potrebno za opsluživanje istih. Odrediti raspodjelu slučajne promjenljive Z koja predstavlja broj poslatih zahtjeva do trenutka kada server A prvi put ne obradi zahtjev prije servera B. Neka je *p* vjerovatnoća da server A obrađuje zahtjev prije servera B. Neka je X slučajna raspodjela vremena obrade zahtjeva od strane servera A, a Y slučajna raspodjela vremena obrade zahtjeva od stane servera B.

Primjer 3 - Rešenje

$$p = P(X < Y) = \int_0^{\infty} P(X < y \mid Y = y) f_Y(y)\,dy = \int_0^{\infty} F_X(y) f_Y(y)\,dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-\lambda_A y}\right) \lambda_B e^{-\lambda_B y} dy = 1 - \lambda_B \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_A + \lambda_B) y} dy = 1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$$

Radi se modifikovanoj geometrijskoj raspodjeli parametra: $\dfrac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A}$

$$q = 1 - p = \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A}$$

$$P(Z = n) = (1 - q) q^{n-1} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B + \lambda_A} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A} \right)^{n-1}, \quad 0 < q < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Primjer 4

Neka se dolazni saobraćaj karakteriše Pareto raspodjelom. U Pareto raspodjeli *a* je parametar oblika koji je pozitivan realan broj, dok je *b* minimalna vrijednost slučajne promjenljive.

Za vrijednosti a=1.4, 1.5 , 1.6, i b=2, odrediti srednju vrijednost slučajne promjenljive?

Kako utiču parametri raspodjele na srednju vrijednost?

Odrediti Laplasovu transformaciju Pareto raspodjele.

Primjer 4 - Rešenje

$$f_X(x) = \frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq b$$

$$E(X) = \int_b^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_b^{\infty} x \frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\,dx = \alpha b^{\alpha} \int_b^{\infty} x^{-\alpha}\,dx = \frac{\alpha b}{\alpha - 1}$$

$$\alpha = 1.4,\ \text{b=2},\ E(X) = \frac{1.4 * 2}{0.4} = 7$$

$$\alpha = 1.5,\ \text{b=2},\ E(X) = \frac{1.5 * 2}{0.5} = 6$$

$$\alpha = 1.6,\ \text{b=2},\ E(X) = \frac{1.6 * 2}{0.6} = 5.33$$

$$X(s) = \int_b^{\infty} \frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} e^{-sx}\,dx = \alpha b^{\alpha} \int_b^{\infty} \frac{e^{-sx}}{x^{\alpha+1}}\,dx$$

$$X(s) = \alpha b^{\alpha} s^{\alpha} \Gamma(-\alpha, sb),\ \ gdje\ \ je\ \Gamma(-\alpha, sb) = \int_{sb}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

Primjer 5

Odrediti raspodjelu sume N slučajnih promjenljivih koje imaju identičnu modifikovanu geometrijsku raspodjelu. Broj slučajnih promjenljivih N takođe ima modifikovanu geometrijsku raspodjelu.

$$P(X=k)=q^{k-1}(1-q)\quad k=1,\,2{,}3\ldots$$

$$X(z)=\sum_{k=1}^{\infty}z^kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}z^k(1-q)q^{k-1}=z(1-q)\sum_{k=1}^{\infty}(zq)^{k-1}=\frac{z(1-q)}{1-zq}$$

Modifikovana geometrijska

$$P(N=j)=p^{j-1}(1-p)\quad j=1,\,2{,}3\ldots\qquad\Rightarrow\quad N(z)=\frac{z(1-p)}{1-zp}$$

$$Y=\sum_{i=1}^{N}X_i$$

$$Y(z)=\prod_{i=1}^{N}X_i(z)$$

$$Y(z)=\sum_j\prod_{i=1}^{j}X_i(z)P(N=j)=\sum_j\left[X(z)\right]^jP(N=j)=N(X(z))$$

$$Y(z)=\frac{\dfrac{z(1-q)}{1-zq}(1-p)}{1-\dfrac{z(1-q)}{1-zq}p}=\frac{z(1-q)(1-q)}{1-z[q+p-pq]}=\frac{z(1-p)(1-q)}{1-z[1-(1-q)(1-p)]}$$

I dalje modifikovana geometrijska raspodjela parametra (1-q)(1-p)